Devoir maison n° 9 - Correction

Exercice 1. (*E3A PSI 2020*)

Pour tout entier naturel n, on définit sur l'intervalle $J = [1\,;+\infty[$ la fonction f_n définie par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$.

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur J.

Idée : *Il s'agit de regarder si pour chaque $x \in J$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente.*

Soit $x \in J$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+nx}}$ de façon que $f_n(w) = (-1)^n w_n$.

La suite $(w_n)_n$ est positive, décroissante (inverse d'une suite croissante) et de limite nulle (car $x > 0$) donc, d'après le $\boxed{\text{critère spécial des séries alternées}}$, la série $\sum (-1)^n w_n = \sum f_n(x)$ est convergente.

Ceci étant valable pour tout $x \in J$, $\boxed{\text{la série de fonctions } \sum\limits_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge simplement sur } J}$.

On note alors pour tout $x \in J$, $\varphi(x)$ sa somme.

2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J.

Idée : *On étudie la convergence de la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$.*

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in J$, on a $|f_n(x)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+nx}}$. Par décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+nx}}$ sur J, cette fonction atteint son maximum en $x = 1$ et il vaut $\dfrac{1}{\sqrt{1+n}}$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{1+n}}}$.
- Comme $\dfrac{1}{\sqrt{1+n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (car $1/2 \leqslant 1$), par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge.

Autrement dit $\boxed{\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ ne converge pas normalement sur } J}$.

3. Étudier sa convergence uniforme sur J.

Idée : *Série alternée donc on utilise le résultat concernant la majoration du reste.*

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in J$. On note $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

La série $\sum f_k(x)$ étant alternée, d'après le cours, on a $\boxed{|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}}}$. En utilisant comme en Q2 la décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}}$, on obtient $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$. Ce majorant étant indépendant de x, par passage au sup, il vient $\boxed{\|R_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}}$. Comme $\dfrac{1}{\sqrt{n+2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, par encadrement, on a $\|R_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *i.e.* la série de fonctions $\boxed{\sum f_n \text{ converge uniformément sur } J}$.

4. Déterminer $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Idée : *Théorème de la double limite.*

– Pour $n = 0$, on a $f_0(x) = \dfrac{(-1)^0}{\sqrt{1+n\times 0}} = 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, on pose donc $\ell_0 = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (car $n > 0$), on pose donc $\ell_n = 0$.

– D'après la question précédente, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur J vers φ.

Par conséquent, d'après le théorème de la double limite, la série $\sum \ell_n$ converge (mais c'est évident ici) et surtout $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 1}$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Justifier la convergence de la série de terme général u_n.

C'est encore une fois une conséquence directe du critère spécial des séries alternées (la suite $(u_n)_n$ est alternée et la suite $\left(|u_n|\right)_n$ est décroissante et converge vers 0).

On note $a = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

6. ☆ Montrer que l'on a au voisinage de l'infini : $\varphi(x) = \ell + \dfrac{a}{\sqrt{x}} + O\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

D'abord, d'après la question 4, on a $\ell = 1$ et on remarque que pour tout $x \in J$, $f_0(x) = 1$.

Pour $x \in J$, on considère donc $\varphi(x) - \ell = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ (noter l'indice de début de sommation).

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on écrit

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{xn}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{xn}+1}} && \textit{Factorisation} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{xn}\right)^{-1/2} && \textit{Réécriture} \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{2xn} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) && \textit{D.L. lorsque } x \to +\infty \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{=u_n} - \frac{1}{x^{3/2}} \underbrace{\left(\frac{(-1)^n}{2n^{3/2}} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} o(1)\right)}_{=b_n}
\end{aligned}$$

D'après la question précédente, on sait que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et sa somme vaut a. Par ailleurs, la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge (CSSA à nouveau) et on note B sa somme.

Finalement, en sommant l'égalité précédente pour $n \in \mathbb{N}^*$, il vient $\varphi(x) - \ell \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{a}{\sqrt{x}} + \dfrac{B}{x^{3/2}}$, *i.e.*

$\boxed{\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} \ell + \dfrac{a}{\sqrt{x}} + O\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)}$.

Remarque : C'est un peu costaud pour une question d'un exercice 1 d'un sujet E3A !

Exercice 2. ★
Dans cet exercice, on confond polynôme et fonction polynomiale.

1. Que dire d'un polynôme borné sur $\mathbb{R}$?

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul borné sur $\mathbb{R}$. Notons d son degré et $a_d \neq 0$ son coefficient dominant.

On a $P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_d x^d$. Ainsi, si $d \geqslant 1$, on a $P(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$ (suivant le signe de a_d), ce qui contredit le fait que P soit borné sur $\mathbb{R}$. Par conséquence $d < 1$, *i.e.* P est constant.

- Réciproquement, les polynômes constants (nuls ou non) sont clairement bornés sur $\mathbb{R}$.

On a donc montré que $\boxed{\text{les polynômes bornés sur } \mathbb{R} \text{ sont exactement les polynômes constants}}$.

2. Montrer que la limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes est encore un polynôme.

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, c'est-à-dire $\|P_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Par définition de la limite avec $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\|P_n - f\|_\infty \leqslant 1$ (❋).
Soit $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant N$. On a alors

$$\begin{aligned}
\|P_N - P_n\|_\infty &= \|P_N - f + f - P_n\|_\infty && \textit{inégalité triangulaire}\\
&\leqslant \|P_N - f\|_\infty + \|P_n - f\|_\infty && (❋)\\
&\leqslant 1 + 1 = 2.
\end{aligned}$$

En particulier, $P_N - P_n$ est un polynôme (car différence de deux polynômes) borné par 2. D'après la question précédente, on en déduit qu'il est constant, notons a sa valeur.
Comme ceci est vrai pour tout $n \geqslant N$, on obtient que pour tout $n \geqslant N$, $P_n = P_N + a$. En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $f = P_N + a$ et en particulier $\boxed{f \text{ est un polynôme}}$.

Remarque : Sur un segment, on a un résultat tout à fait différent : toute fonction continue sur le segment $[a\,;b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales. (C'est le théorème de Stone-Weierstrass, cf DS2bis, partie II.)